

- 1. 大题，根据题型复习考点，需要重点关注掌握。
- 2. 别光看着傻乐，拿出纸笔一起写，要是写的没我快就得好好学了。
- 3. 坚持这两个小时，你一定会有收获的；
按照这三条去做，一定不会挂科的。

一. 概率论与贝叶斯.

例 5 某电子设备制造厂所用的元件是由三家元件制造厂提供的. 根据以往的记录有以下的数

元件制造厂	次品率	提供元件的份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

1) 石场. 2) 可能.
狗. —
炸鸡. * 你 —
21. *

0.15 / 1
次品率 0.02
0.80 / 2
0.01
0.05 / 3
0.03

格式规范: 设 A: 次.
B₁, B₂, B₃ 为由厂家提供

由公式得..

二. 常见函数分布和性质.

fix. Fix. Exp. Dir.

附表

附表 1 几种常用的概率分布表

分布	参数	分布律或概率密度	数学期望	方差
(0-1)分布	$0 < p < 1$	$P(X=k) = p^k(1-p)^{1-k}, k=0,1$	p	$p(1-p)$
二项分布	$n \geq 1$ $0 < p < 1$	$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $k=0,1,\dots,n$	np	$np(1-p)$
负二项分布 (帕斯卡分布)	$r \geq 1$ $0 < p < 1$	$P(X=k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$ $k=r, r+1, \dots$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$
几何分布	$0 < p < 1$	$P(X=k) = (1-p)^{k-1} p$ $k=1,2,\dots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
超几何分布	N, M, n ($M \leq N$) ($n \leq N$)	$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{nM}{N} (1 - \frac{M}{N}) (\frac{N-n}{N-1})$

分布	参数	分布律或概率密度	数学期望	方差
正态分布	μ $\sigma > 0$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	μ	σ^2
Γ 分布	$\alpha > 0$ $\beta > 0$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$
指数分布	$\lambda > 0$	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
χ^2 分布	$n \geq 1$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$	n	$2n$

几何分布	$0 < p \leq 1$	$k = 1, 2, \dots$ $P(X=k) = (1-p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
超几何分布	N, M, n ($M \leq N$) ($n \leq N$)	$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ k 为整数, $\max(0, n-N+M) \leq k \leq \min(n, M)$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{nM}{N} (1 - \frac{M}{N}) \frac{(N-n)}{(N-1)}$
泊松分布	$\lambda > 0$	$P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $k = 0, 1, 2, \dots$	λ	λ
均匀分布	$a < b$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$

指数分布	$\lambda > 0$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} & x > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$	θ	θ
χ^2 分布	$n > 1$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$	n	$2n$
韦伯分布	$\gamma > 0$ $\beta > 0$	$f(x) = \begin{cases} \frac{\gamma}{\beta^\gamma} x^{\gamma-1} e^{-(x/\beta)^\gamma} & x > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$	$\gamma(\frac{1}{\beta} + 1)$	$\gamma(\frac{1}{\beta} + 1) - [\gamma(\frac{1}{\beta} + 1)]^2$
瑞利分布	$\sigma > 0$	$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/(2\sigma^2)} & x > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma$	$\frac{4-\pi}{2} \sigma^2$

1) 1=项: 常与其他结合. $\times$ $\star$

2. 泊松: 时间内发生的次数 $\Rightarrow P(X=x_i)$

3. 指数: 事件的发生 $\Rightarrow f(x)$

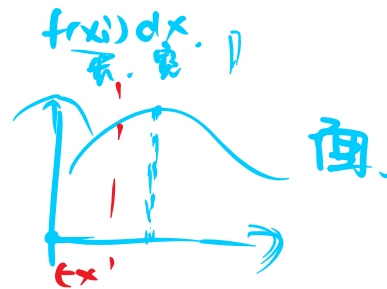
4. 正态: 更 $\Rightarrow \frac{x-\mu}{\sigma}$ 标准化

5. 均匀: $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

$\Rightarrow F_0(x)$ $P(X \leq x)$



$f(x)$ 密度点



3. 随机变量函数分布. $Y = g(X)$ 分布

题型: $f_X(x)$, $Y = g(X)$ $f_Y(y)$

方法: 1. 公式. 2. 积分

$$F_{\text{猫}}(\text{狗}) = P(\text{猫} \leq \text{狗})$$

$$f_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y)$$

$$P(X \leq z)$$

$$\Rightarrow y \geq g(x)$$

例 5 设电压 $V = A \sin \Theta$, 其中 A 是一个已知的正常数, 相角 Θ 是一个随机

变量, 且有 $\Theta \sim U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 试求电压 V 的概率密度.

$\star$ $f_V(v)$ $f_\Theta(\theta)$ $v = f(\theta)$ $f_V(v)$ $f_\Theta(\theta)$

$$f_\theta(\theta) = f_\theta(\theta), \quad V = f(\theta), \quad f_V(V)$$

$$F_V(V) \Leftrightarrow P(V \leq v) \Leftrightarrow P(A \sin \theta \leq v)$$



$$1^\circ \quad V \geq A: \quad P=1 \quad \& \quad F_V(V)=1$$

$$2^\circ \quad V \leq -A: \quad P=0 \quad \& \quad F_V(V)=0$$

$$3^\circ \quad -A \leq V \leq A: \quad = P(\theta \leq \arcsin \frac{V}{A})$$

$$= F_\theta(\arcsin \frac{V}{A})$$

$$= f_\theta(\arcsin \frac{V}{A}) \cdot \frac{f_\theta(\theta)}{\sqrt{V^2 - A^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{V^2 - A^2}}$$

综上, ..

例 公式法: $f_Y(y) = f_X[h(y)] |h'(y)|, \quad a < h(y) < b$

4. 二维连续分布函数 & 数字特征

1. 分布函数

$$F(x, y) \quad f(x, y)$$

$$F(x) = \int_0^1 f(x, y) dx dy$$

例 什么是二重积分? $\int \int_D: \rightarrow$ 积分区域
 $f(x, y) \rightarrow$ 被积函数

$$D: (x^2+y^2 \leq a^2) \quad L: x^2+y^2=1$$

$$f(x,y) = \text{咸酱}$$

$$D_1 = \text{饼}$$

$$g(x,y) = \text{甜酱}$$

$$D_2 = \text{条}$$

$$h(x,y) = \text{肉酱}$$

$$I_1 = \iint_{D_1} f(x,y) dx dy = \text{煎饼}$$

$$I_4 = \iint_{D_4} f(x,y) dx dy = \text{油条}$$

$$I_2 = \iint_{D_2} g(x,y) dx dy = \text{点心}$$

$$I_5 = \iint_{D_5} g(x,y) dx dy = \text{泡芙}$$

$$I_3 = \iint_{D_3} h(x,y) dx dy = \text{披萨}$$

$$I_6 = \iint_{D_6} h(x,y) dx dy = \text{薯}$$

$\Rightarrow$ 被积函数 & 区域无关
性质由 = 有决定

$\Rightarrow$ 1. 什么饼.
2. 什么条

$$f(x,y) \quad D_1$$

例 2 设二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(2x+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 求分布函数 $F(x,y)$; (2) 求概率 $P\{Y \leq X\}$.

$$(1) \text{ 求 } a.$$

$$(2) Y \leq X$$

【例】指数:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$\int_0^{+\infty} \lambda e^{-x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$\int f(x) dx$$

2. 数字特征.

$$\rho = \frac{\text{cov}}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

$$\rho = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

"1"

$$E(X) = \int$$

$$\begin{cases} \rho = \frac{D(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} \\ \text{cov} = E(XY) - E(X)E(Y) \\ D(X) = E(X^2) - E^2(X) \end{cases} \quad \begin{cases} E(g(x)) \\ E(XY) \end{cases}$$

3. [补] 函数分布

例2 在一简单电路中, 两电阻 R_1 和 R_2 串联连接, 设 R_1, R_2 相互独立, 它们的概率密度均为

$z=x+y$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10-x}{50}, & 0 \leq x \leq 10, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求总电阻 $R=R_1+R_2$ 的概率密度.

x, y 为电阻

$f(y)$



$$F_R(z) = P(R \leq z) = P(R_1 + R_2 \leq z)$$

$$= \iint f(x,y) dx dy$$

$$= \int_0^z dx \int_0^{z-x} \left(\frac{10-x}{50}\right) \left(\frac{10-y}{50}\right) dy.$$

$$x+y=1-x$$

以上, 为 .. ;

以下, 为 ..

1. 样本和总体 (引入)

设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为来自 X 的一个样本.

$$\bar{x}, s^2, n, \sigma^2$$

幸福问题

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2$$

总体: 三把

样本: 五黑/常姐? 咋可以

2. 中心极限定理 (正态): 查你这段时间胜率, 知你所求

$$x_1, x_2, \dots, x_i \sim F(n, \sigma^2) \dots \Rightarrow E(X), D(X)$$

$$x_1, x_2, \dots, x_i \sim F(N, 0) \dots \in \mathbb{R}^N, \dots$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \sim N(n\mu, n\sigma^2) \\ \bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1) \\ \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \end{cases}$$

3) 统计学的三大分布 [基础]

1) χ^2 分布: 正!

$$x_1, x_2, \dots, x_n \sim N(0, 1) \Rightarrow X = \sum_{i=1}^n x_i^2 \sim \chi^2(n)$$

理解: $t > 0$ 物理意义: 数值大小.



2) t 分布: 比值.

$$\begin{cases} X \sim N(0, 1) \\ Y \sim \chi^2(n) \end{cases} \Rightarrow t = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t(n)$$

$$Y = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

$$Y/n = x_i^2 \quad \sqrt{\frac{Y}{n}} = x_i$$

3) F 分布 比值

$$\begin{cases} X \sim \chi^2(n_1) \\ Y \sim \chi^2(n_2) \end{cases} \Rightarrow F = \frac{X/n_1}{Y/n_2}$$

来源: 理解, 指数分布

4. 正态总体常用结论 [重要] 重要到没有格子

总体: $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$
 样本: $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0,1) \dots \text{①} \\ \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \dots \text{②} \end{cases}$

① $\bar{X} \rightarrow N$

② $S \rightarrow \sigma$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^n (\frac{X_i - \mu}{\sigma})^2 \sim \chi^2(n)$ $\Rightarrow \sum_{i=1}^n (\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma})^2 \sim \chi^2(n-1)$
 $\Rightarrow \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$ $\Rightarrow S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \Rightarrow \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

μ : 参数

σ : 知道

$\Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

③ F

$\Rightarrow \frac{(\bar{X} - \mu)^2}{S^2/n} \sim F(1, n-1)$

4. [应用]: 从区间估计到假设检验

肥胖率为 70%, 输入多少, 可信度为 95%

区间估计: $n/6$ 显著性为 $1-\alpha$ 的区间?

例: α : 小概率
 $1-\alpha$:

$\Rightarrow \frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0,1) \dots \text{①}$

$\Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \dots \text{②}$

$\Rightarrow \sigma$

③ $S \rightarrow \sigma$

$\Rightarrow \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \Rightarrow \frac{S^2}{\sigma^2} \sim \frac{\chi^2(n-1)}{n-1}$

$\Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \Rightarrow S$

$\Rightarrow \frac{(\bar{X} - \mu)^2}{S^2/n} \sim F(1, n-1)$

例 1 有一大批糖果. 现从中随机地取 16 袋, 称得重量(以 g 计)如下:

506 508 499 503 504 510 497 512
514 505 493 496 506 502 509 496

$x_1, x_2, \dots, x_n$

设袋装糖果的重量近似地服从正态分布, 试求总体均值 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

$\bar{x} =$

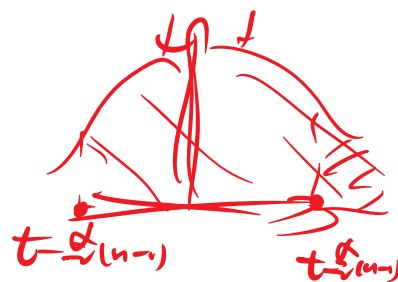
$s =$

$n =$

$$\left| \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \right| \sim t_{n-1}$$

$$\left| \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \right| < t_{\alpha/2}(n-1)$$

$$\mu = \left[\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) \right]$$



如果你胜率有 70%, 查你战绩能知道真假
假设验证: 1) $H_0: \mu = \mu_0$ (拒绝域)

$$H_0: \mu \neq \mu_0$$

2) 根据数据, 选用 $\chi^2, t, f, \dots$

3).

点估计 / 矩估计 / 似然估计 / 估计另选估计标准 / 无偏性 / 有效性 / 相合性

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$E(\hat{\theta}) = \theta \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(x_i^2) = \theta$$